



قسمت اول: **مجموعه پروژه‌های کوچک** **فاصله دوزیر مجموعه برای ریاضی دانان کوچک**

● خسرو داودی و آرش رستگار

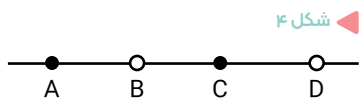
ج) $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$
د) $d(A,B) = d(B,A)$
نامساوی (ج) را «نامساوی مثلث» می‌نامند. چون اگر A ، B و C نقطه‌هایی در صفحه باشند و یک مثلث را تشکیل دهند که برای آن لازم می‌آید هم‌راستا نباشند (شکل ۱)، یعنی روی یک خط قرار نگیرند، در این صورت مجموع طول‌های دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

دهید. حرف d از کلمه «distance» به معنای «فاصله» گرفته شده است. با تعریف بالا از فاصله دو نقطه روی خط، مفهوم $d(A,B)$ در خصوصیات زیر صدق می‌کند:
الف) برای هر دو نقطه A و B داریم:
 $d(A,B) \geq 0$
ب) شهوداً لازم است: $d(A,A) = 0$
که باید همیشه برقرار باشد، اما اگر:
 $d(A,B) = 0$ ، به‌ناچار: $A=B$.

اگر دو نقطه A و B روی محور عددها قرار گرفته باشند، به‌طوری که A نماینده عدد a و B نماینده عدد b باشد، فاصله دو نقطه A و B را با نماد $|a-b|$ نمایش می‌دهند. یعنی $a-b$ و $b-a$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم: $b-a = -(a-b)$ پس $a-b$ و $b-a$ قرینه یکدیگرند. بنابراین یکی مثبت و دیگری منفی است. آن را که مثبت است فاصله نقطه‌های A و B در نظر بگیرید و با $d(A,B)$ نمایش

یعنی به جای اینکه خطکش را بین A و B قرار دهیم و فاصله آن‌ها را حساب کنیم، خطکش را بین A' و B' قرار می‌دهیم و فاصله A و B را همان عددی تعریف می‌کنیم که خطکش از A' تا B' را اندازه می‌گیرد.

مفهوم $d(A, B)$ هم در خصوصیات (الف) تا (د) صدق می‌کند. پس به آن هم یک مفهوم فاصله روی نقطه‌های خط می‌توان گفت. پس روی نقطه‌های واقع بر خط چندین مفهوم فاصله وجود دارد. حال اولین قدم در تعریف پروژه ما آغاز می‌شود. اکنون می‌خواهیم فاصله دو زیرمجموعه متناهی از خط عددها را تعریف کنیم. برای شروع دو نقطه $\{A, C\}$ را یک زیرمجموعه بگیرد و دو نقطه $\{B, D\}$ را زیرمجموعه دیگری (شکل ۴) و سعی کنید فاصله این دو زیر مجموعه را تعریف کنید.

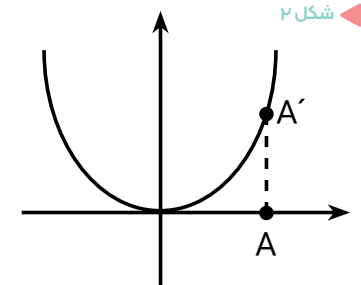


نقطه‌های مجموعه $\{A, C\}$ را با سیاه مشخص و نقطه‌های دیگری را سفید رسم کرده‌ایم. از این پس $\{A, C\}$ را مجموعه سیاه و مجموعه $\{B, D\}$ را مجموعه سفید می‌نامیم. پس می‌خواهیم فاصله بین مجموعه سیاه و مجموعه سفید را تعریف کنیم، به طوری که در اصول موضوعه (الف) تا (د) صدق کند. برای پاسخ اول ببینیم چه در دستمان هست.

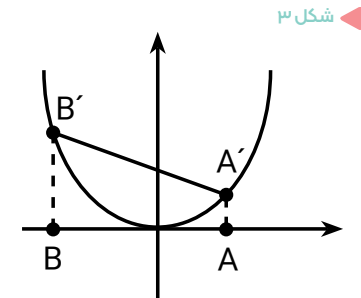
در مورد فاصله بین مجموعه‌های سیاه و سفید فاصله‌های نقطه به نقطه را داریم. مثلاً $d(A, D)$ ، $d(A, B)$ ، $d(C, D)$ و $d(C, B)$ ، بتوان به کمک این عددها یک مفهوم فاصله تعریف کرد. مثلاً کمینه این چهار عدد یا بیشینه آن‌ها می‌تواند نامزد (کاندید) خوبی برای یک مفهوم

معادله $y=2x$ چند جواب دارد؟ معادله $y=x^2$ هم به همین صورت است و بی‌شمار جواب به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ می‌توان برای آن پیدا کرد. اگر این بی‌شمار نقطه را در صفحه محور مختصات پیدا کنیم، با کنار هم قرار گرفتن این بی‌شمار نقطه یک شکل به وجود می‌آید که به آن «سهمی» می‌گویند. اگر بی‌شمار نقطه معادله $y=2x$ را هم پیدا کنیم، یک خط رسم می‌شود. به همین دلیل به معادله $y=2x$ «معادله خط» و به معادله $y=x^2$ «معادله سهمی» می‌گویند.

نمودار $y=x^2$ را در نظر بگیرید. بالای سر هر نقطه A روی محور X ها یک نقطه یگانه وجود دارد (شکل ۲)، به طوری که روی A تصویر می‌شود. این نقطه را A' بنامید.

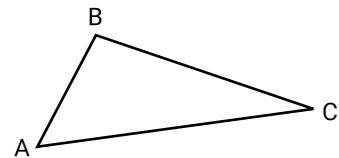


حال فاصله دو نقطه A و B را به کمک A' و B' تعریف کنید (شکل ۳). یعنی قرار دهید: $d(A, B) := d(A', B')$. علامت $:=$ یعنی مفهوم سمت چپ را به کمک فرمول سمت راست تعریف می‌کنیم.



به عبارت دیگر تعریف ما چنین است: $d(A, B) := |A'B'|$

شکل ۱



$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

همین نامساوی وقتی این نقطه‌ها روی یک راستا باشند هم صحیح است. دو نامساوی را در کنار هم مقایسه کنید:

$$d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$$

$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

حالا می‌بینید که چرا به نامساوی (ج) می‌گویند نامساوی مثلث؛ حتی وقتی که A، B و C یک مثلث تشکیل نمی‌دهند. توجه کنید که مهم نیست خطی که A، B و C روی آن قرار دارند، چطور عدمند شده باشد. در هر مختصات‌گذاری دیگری همه خصوصیات (الف) تا (د) باز هم برقرار خواهند ماند. به چنین مفهومی مانند $d(A, B)$ که در خصوصیات بالا صدق کند می‌گوییم: «یک مفهوم فاصله روی نقطه‌های خط».

برای اینکه ذهن خواننده باز شود، مفهوم فاصله دیگری روی نقطه‌های خط تعریف می‌کنیم. قبل از آن لازم است شما را با یک موضوع آشنا کنیم. شما با موضوع معادله در پایه‌های هفتم و هشتم آشنا شده‌اید. وقتی می‌گوییم $x=2$ جواب مسئله $2x-1=3$ است، یعنی اگر به جای x عدد ۲ را قرار دهیم یک تساوی درست خواهیم داشت. اگر معادله $y=2x$ را در نظر بگیریم، نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ یکی از جواب‌های این معادله است. یعنی می‌توانید به جای x عدد ۱ و به جای y عدد ۲ را قرار دهید و تساوی درست به دست آید.

یعنی شامل همه نقطه‌های لبه‌ای خود خواهد شد و همه نقطه‌های مرزی آن درونش هستند. مثلاً نقطه‌های داخل یک دایره همراه نقطه‌های لبه‌ای آن شامل نقطه‌های مرزی‌اش است. اما اگر فقط نقطه‌های داخلی را در نظر بگیریم و نقطه‌های مرزی را به حساب نیاوریم، دیگر مجموعه‌ای بسته نخواهد بود.

حال برای دو مجموعه A و B عدد r را کوچک‌ترین r -همسایگی A فرض بگیرید که شامل B باشد و s را کوچک‌ترین s -همسایگی B فرض بگیریم که شامل A باشد. در این صورت $\max\{r, s\}$ ، یعنی هر کدام از s و r که بزرگ‌تر است، مفهوم خوبی از فاصله برای مجموعه‌های متناهی A و B خواهد بود. اگر A و B اجتماعی متناهی از بازه‌های بسته کران‌دار هم باشند، باز همین تعریف هاوسدورف یک مفهوم فاصله بین مجموعه‌های بسته و کران‌دار را به دست خواهد داد که در اصول موضوعه ما صدق می‌کنند.

حال مسئله پروژه این است:

سؤال پروژه: نوبت شماست که سعی کنید یک مفهوم فاصله برای خط‌های در صفحه تعریف کنید که در اصول موضوعه ما صدق کند. توجه کنید که روش هاوسدورف دیگر کارآمد نیست. پروژه‌های خود را با نرم‌افزار «ورد» حروف‌نگاری کنید و برای شکل‌ها از نرم‌افزار «جئوجبرا» کمک بگیرید. مقالات منتخب شما در رمزینه سریع‌پاسخ مجله برهان چاپ خواهد شد.

پی‌نوشت

1. Hausdorff

کنیم که روی امتداد AC نیست، راه طولانی‌تر خواهد شد. اما وقتی این نامساوی را به یک اصل موضوعه تبدیل کردیم، دیگر خبری از مسیر حرکت از زیرمجموعه A به زیرمجموعه B نخواهد بود. پس نامساوی مثلث می‌شود یک خواسته مجرد که ربطی به مثلث نخواهد داشت. فقط برای این است که مفهوم فاصله‌ای که پیشنهاد می‌دهیم با شهود ما تا جایی که ممکن است هماهنگ باشد. این مسئله را که «برای مجموعه‌های متناهی مفهومی از فاصله تعریف کنیم که در اصول موضوعه (الف) تا (د) صدق کند»، ریاضی‌دانی به نام **هاوسدورف**^۱ حل کرد. او این مسئله را به کمک مفهوم r -همسایگی یک زیرمجموعه A حل کرد:

$$N_r(A) = \left\{ x \mid d(x, y) \leq r \text{ برای یک } y \in A \right\}$$

پس $N_r(A)$ مجموعه نقطه‌هایی است که در r -همسایگی حداقل یکی از نقطه‌های A باشند. مثلاً اگر A در صفحه تک‌نقطه‌ای باشد، $N_r(A)$ می‌شود داخل و روی دایره‌ای به شعاع r و به مرکز A . اگر A روی خط که یک بعدی است، باشد و تک‌نقطه‌ای باشد $N_r(A)$ می‌شود بازه بسته‌ای به مرکز A . اگر A در فضای سه بعدی باشد و تک‌نقطه‌ای باشد، $N_r(A)$ می‌شود داخل و روی سطح کره‌ای به شعاع r و به مرکز A . می‌توانید برای همه نقطه‌های A یک r -همسایگی در نظر بگیرید و اجتماع همه این r -همسایگی‌ها می‌شود: $N_r(A)$. $N_r(A)$ یک مجموعه بسته خواهد بود.

فاصله باشد. به‌خصوص که این نامزد به دو زیرمجموعه متناهی از خط هم قابل تعمیم است. یعنی اگر این ایده برای فاصله مجموعه‌های دو نقطه‌ای کار کند، احتمالاً برای فاصله هر دو زیرمجموعه متناهی از خط هم قابل بررسی است. یعنی دوعضوی بودن این مجموعه‌ها مزاحم تعمیم نیست. روش اول این است که کوچک‌ترین مقدار از عددهای بالا را فاصله مجموعه سیاه و مجموعه سفید تعریف کنیم. در حالت کلی فرض می‌گیریم:

$$d^*(A, B) = \min \{ d(x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

توجه داشته باشید که در اینجا زیرمجموعه‌های A و B از خط را متناهی در نظر می‌گیریم. می‌توان آن‌ها را اجتماعی متناهی از بازه‌های بسته هم گرفت و یا به جای $\min$ بزرگ‌ترین کران پایین را گرفت که به آن نمی‌پردازیم. روش دوم این است که به هر مجموعه مانند A میانگین آن را نسبت دهیم که آن را A' می‌نامیم و تعریف می‌کنیم:

$$d_1(A, B) := d(A', B)$$

با این روش هم یک فاصله تعریف کرده‌ایم. اما d^* در اصول موضوعه ما صدق نمی‌کند. مثلاً اگر A و B اشتراک داشته باشند، فاصله آن‌ها صفر خواهد شد؛ بدون اینکه با هم برابر باشند.

حتی اصل موضوع نامساوی مثلث هم برای d^* برقرار نخواهد بود. مثلاً A و B را تک نقطه‌ای بگیرید و C را اجتماع آن‌ها. یک نکته در اینجا اهمیت دارد. نامساوی مثلث بر این نکته تکیه دارد که اگر بخواهیم از A به C برویم، کوتاه‌ترین راه خط مستقیم است و اگر بخواهیم از نقطه B عبور